CONCURSO DE TESISTAS
Resolución de problemas propuestos

GUSTAVO IVÁN DELGADO ROMERO

Facultad de Ingeniería Civil
Universidad Nacional Federico Villarreal

Junio 2023

Universidad Nacional Federico Villarreal
Facultad de Arquitectura y Urbanismo

Contenido

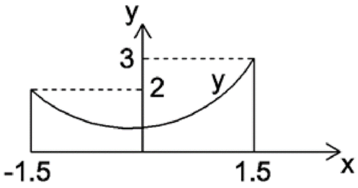
Introducción

El presente trabajo tiene por objetivo demostrar la capacidad resolutiva e investigativa de cada uno de los participantes del concurso de tesistas, para ello el jurado ha propuesto 4 problemas, 2 de ellos han sido abordados en el presente trabajo.

Contenido

2 Problema 1

Sea la catenaria:



Cuya fórmula es:

$$y = C_1 * \cosh(\frac{x + C_2}{C_1})$$

y cuyas condiciones de extremo son:

$$x_1 = -1.5$$

$$y_1 = 2$$

y:

$$x_2 = 1.5$$

$$y_2 = 3$$

Para el cálculo de c_2 tendríamos:

$$C_2 = C_1 * \text{acosh}(\frac{y}{C_1}) - x$$

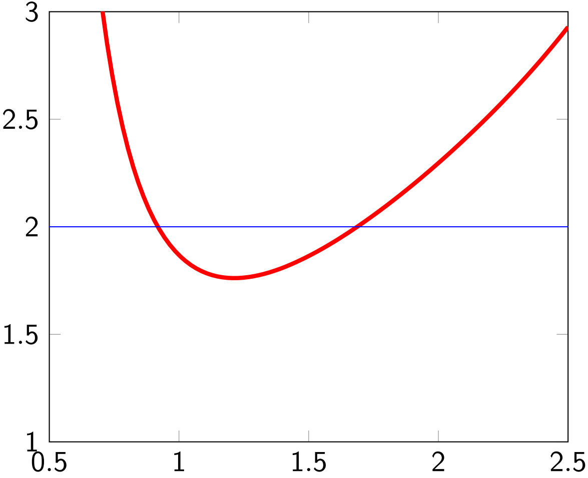
Reemplazamos para los valores iniciales del extremo derecho:

$$C_2 = C_1 * \text{acosh}(\frac{y_2}{C_1}) - x_2$$

y luego reemplazamos c_2 para los valores iniciales del extremo izquierdo:

$$y_1 = C_1 * \cosh(\frac{x + (C_1 * \text{acosh}(\frac{y_2}{C_1}) - x_2)}{C_1})$$

Gráfica de la ecuación $y(c_1)$



Resolución del problema en Python por iteraciones sucesivas I

Declaramos variables del programa y el error admisible:

```
#@title Variables iniciales:
import math
#Se pide la cantidad
#de decimales admisibles
n1=5 #@param {type:"integer"}
#se calcula el error
err_admisible=10**(-n1)
```

Resolución del problema en Python por iteraciones sucesivas II

Declaramos las condiciones de extremo del problema y los límites entre los que buscará una respuesta:

```
x1=-1.5 #@param {type:"number"}
y1=2 #@param {type:"number"}
x2=1.5 #@param {type:"number"}
y2=3 #@param {type:"number"}
li=0.75 #@param {type:"number"}
lf=3 #@param {type:"number"}
```

Resolución del problema en Python por iteraciones sucesivas III

Se calcula los valores de y1 para el límite superior e inferior escogido de c1

```
c2i=li*math.acosh(y2/li)-x2
y1i=li*math.cosh((x1+c2i)/(li))
c2f=lf*math.acosh(y2/lf)-x2
y1f=lf*math.cosh((x1+lf)/(lf))
```

Resolución del problema en Python por iteraciones sucesivas IV

Calculamos el valor intermedio de y1 considerando el valor medio de c1:

```
c1a=(li+lf)/2
c2b=c1a*math.acosh(y2/c1a)-x2
y1b=c1a*math.cosh((x1+c2b)/(c1a))
```

Resolución del problema en Python por iteraciones sucesivas V

si el límite inicial es mayor que el límite final ejecutamos este código,

```
if y1i>y1f:
  while abs(y1-y1b)>err_admisible:
    if y1b>y1:
        li=c1a
    else:
        lf=c1a
    c1a=(li+lf)/2
    c2b=c1a*math.acosh(y2/c1a)-x2
    y1b=c1a*math.cosh((x1+c2b)/(c1a))
```

el proceso termina cuando la diferencia de y1 y y1b es menor al error admisible

Resolución del problema en Python por iteraciones sucesivas VI

si el límite inicial es menor que el límite final ejecutamos este código

```
else:
  while abs(y1-y1b)>err_admisible:
    if y1b>y1:
        lf=c1a
    else:
        li=c1a
    c1a=(li+lf)/2
    c2b=c1a*math.acosh(y2/c1a)-x2
    y1b=c1a*math.cosh((x1+c2b)/(c1a))
```

el proceso termina cuando la diferencia de y1 y y1b es menor al error admisible

Resolución del problema en Python por iteraciones sucesivas VII

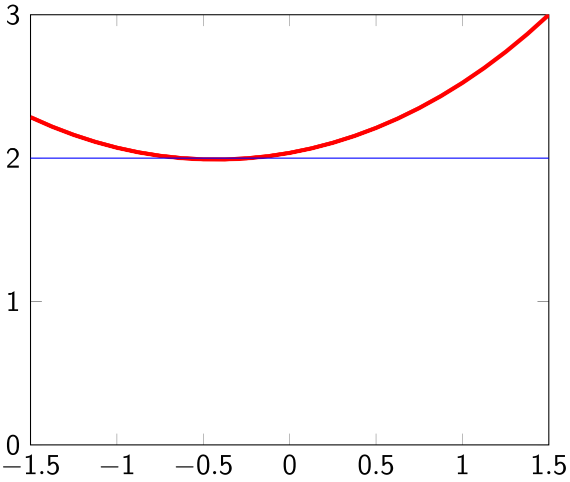
se imprimen los resultados:

```
print("y1a: ",y1a)
print("y2a: ",y2a)
print("C1a=", c1a)
print("C2b=",c2b)
```

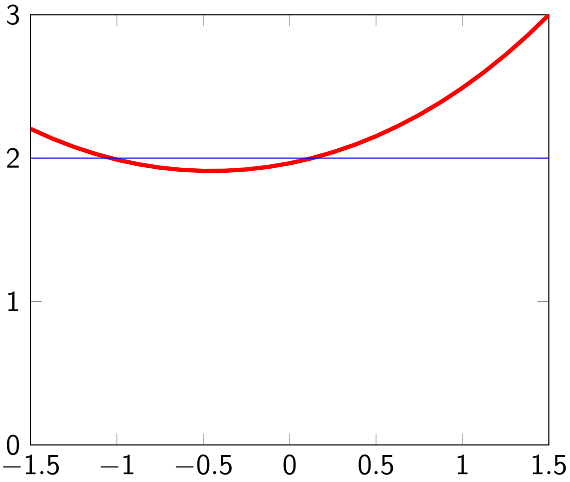
Resultados obtenidos:

```
y1a:  2.0000142298677472
y2a:  2.9999999999999996
C1a= 1.6871399999979504
C2b= 0.48776557059857084
```

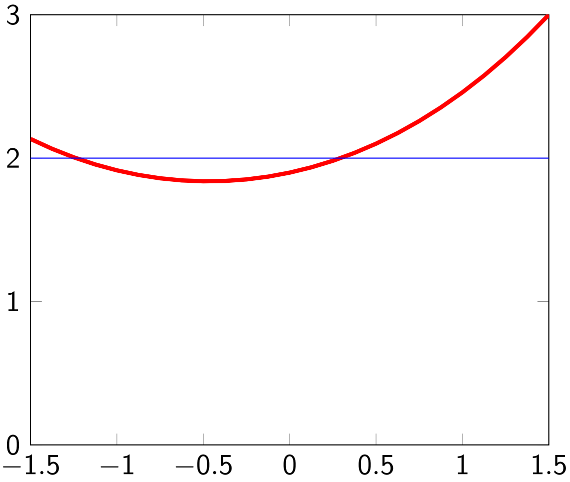
Explicación gráfica del proceso I

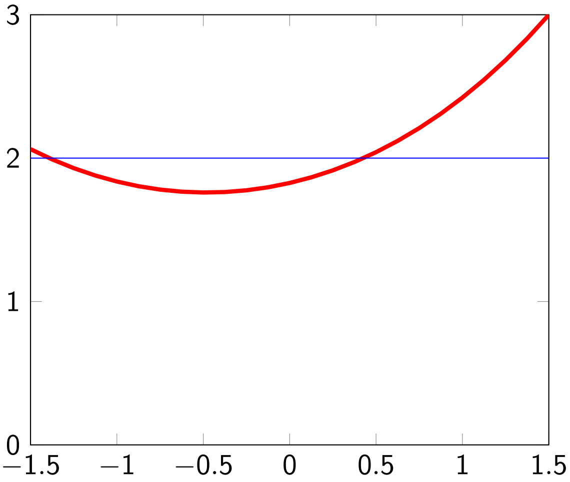


Explicación gráfica del proceso II

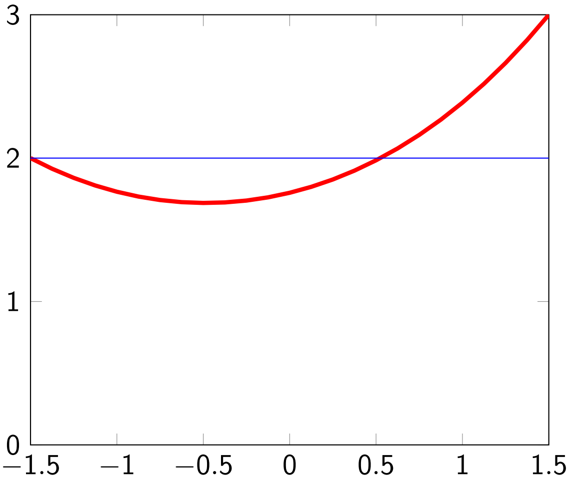


Explicación gráfica del proceso III



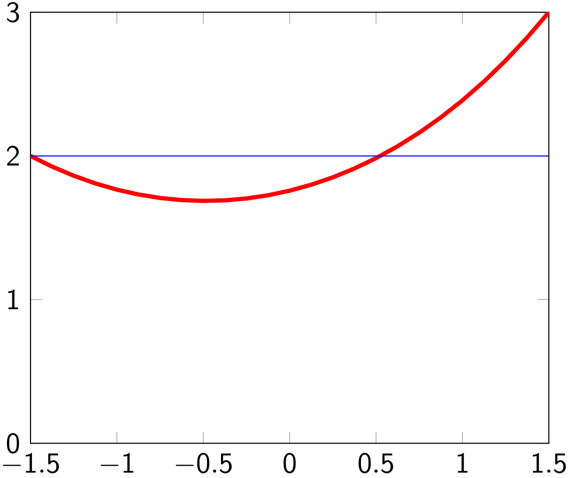

3
2
1
0
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5

Explicación gráfica del proceso V

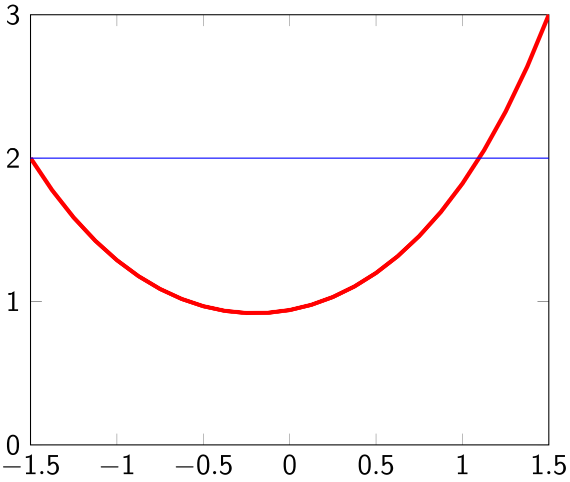


Cálculo de las constantes de una catenaria.- Las constantes μ, c_1, c_2, para unas condiciones iniciales dadas, no pueden calcularse más que mediante técnicas de análisis numérico.[1] Esto debido a que las ecuaciones con funciones trascendentes que tienen a una variable por dentro y por fuera de la función trascendente no pueden resolverse por métodos analíticos.
Para terminar de resolver la catenaria, utilizaremos el siguiente enlace con el código expuesto hecho en Google Coolab: Enlace de Coolab

[1] Ivorra, 2012.


3
2
1
0
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5

Gráfica de cuerda larga



El cable es un elemento flexible que, sujeto a cargas externas, adquiere una forma concreta llamada funicular, que depende de la magnitud y la posición de las mismas, la forma que adopta el cable al estar sujeto en sus extremos y expuesto a la acción de su propio peso es justamente la catenaria.

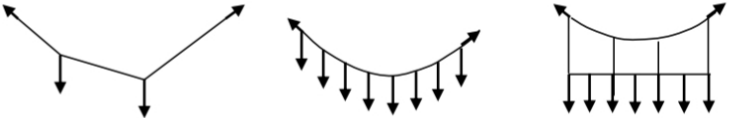


Figura: Formas que adoptan los cables al estar someditos a diferentes cargas.

Las estructuras atirantadas se han utilizado extensamente a lo largo de la historia, hay muchos ejemplos de puentes colgantes con materiales tipo bambú, cañas o cuerdas. Más actualmente se han construido un gran número de edificios con estructuras de cables, siendo el acero galvanizado y el acero inoxidables los materiales más usados actualmente.

Figura: Uniones de Cables.

Importancia de la catenaria III

Entre las estructuras que utilizan a los cables, o se sirven de la forma de la catenaria, podemos encontrar los siguientes grupos

- Estructuras soportadas por cables
- Estructuras superficiales formadas por cables.
- Estructuras con arcos catenarios como columnas de apoyo.

Estructuras soportadas por cables:
Se caracterizan porque los cables trabajan individualmente, como elementos suspendidos o como columnas a tracción, para soportar elementos estructurales como vigas, superficies o edificios.

Figura: Millenium Bridge, Londres.

Un ejemplo de edificio soportado por cables es el banco de la reserva federal de Mineapolis, de Gunnar Birkerts (1973) en el que de dos cables anclados a dos núcleos de hormigón separados 100 m cuelgan 11 plantas.

Figura: Banco de la reserva federal, Mineapolis

Estructuras superficiales formadas por cables:
Se caracterizan porque los cables trabajan conjuntamente formando estructuras superficiales o incluso bidimensionales.
Se utilizan fundamentalmente para cubiertas y, en ellas, los cables se disponen paralelamente o de forma radial, llegando a cubrir luces de entre 45 m y 135 m^2

Figura: Terminal del aeropuerto de Dulles

Estructuras con arcos catenarios:
Antoni Gaudí, arquitecto español de mediados del s. XIX, trabajó un sistema estructural basado en la mecánica y la geometría de las curvas funiculares, a partir de la observación de formas orgánicas en la naturaleza.

Figura: Arcos catenarios de Gaudi

[2] Basset Salom y Guardiola Villora, 2015.

Mencionaremos, por último, que el problema de la catenaria puede abordarse desde un punto de vista completamente distinto, partiendo del hecho de que la catenaria debe ser la curva que une dos puntos con una longitud dad con la mínima energía potencial. La energía potencial de una curva es:[3]

$$E(y) = \int_0^L gy(s)\rho \cdot ds = \rho g \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx$$

de donde obtenemos que:

$$y = \frac{h}{2} + \frac{a}{\gamma}(\cosh(\gamma \frac{x}{a} + C_2) - \cosh(C_2)\cosh(\gamma))$$

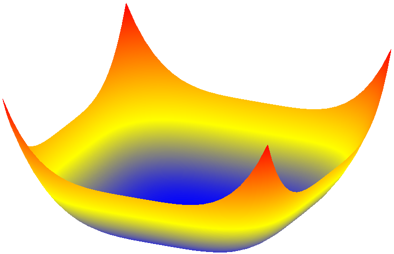
siendo los puntos extremos de la catenaria $(-a, 0)$ y (a, h)

[3] Ivorra, 2012.

Presentación del problema

Para la siguiente función:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x$$



Se pide:

- Calcular el mínimo o mínimos de la función $f(x,y)$ de manera analítica.
- Presentar y discutir el método numérico de newton para optimización y aplicarlo para encontrar los mínimos de $f(x,y)$
- presentar y discutir un algoritmo genético para maximizar o minimizar funciones. Puede presentar su aplicación para el caso de una función de una variable.

Cálculo de puntos máximos o mínimos de una función de dos variables.- Si buscamos los extremos relativos de una función hay que analizar los puntos donde las derivadas parciales valen cero o no existen. Dichos puntos se llaman puntos críticos o estacionarios de f.[4]

Por lo tanto, hacemos:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y) = 4x^3 - 1 = 0$$

y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y) = 4y^3 = 0$$

de donde obtenemos el punto crítico $P(x_0, y_0)$:

$$x_0 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \approx 0.62996; \, y_0 = 0$$

[4] Unidad Docente de Matemáticas de la ETSITGC de la Universidad Politécnica de Madrid, 2017.

Condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos I

Criterio de la segunda derivada: Sea $z = f(x,y)$ una función definida en un espacio $D \subset R^2$ y $P(x_0, y_0) \in D$. Supongamos que f tiene derivadas parciales de primer y segundo orden continuas en D y que $P(x_0, y_0)$ es un punto crítico de f, es decir $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$, entonces se verifica que:

1. f tiene un punto máximo en $P(x_0, y_0)$ si:
$f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ y $\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0$

2. f tiene un punto mínimo en $P(x_0, y_0)$ si:
$f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ y $\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0$

3. f no tiene ni máximo ni mínimo en $P(x_0, y_0)$, es decir presente un punto silla sí:
$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} < 0$

4. No podremos asegurar que f tiene máximo ni mínimo si:
$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = 0$

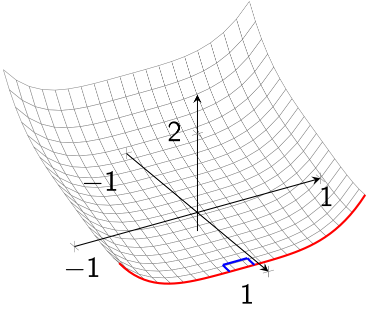
Condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos II

Como vimos anteriormente, para calcular los máximos y mínimos de la ecuación $f(x,y)$ debemos calcular las segundas derivadas $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$ y $f_{yy}(x,y)$, y evaluarlas en el punto crítico $P(x_0,y_0) = P(0.63;0)$ para poder ubicar al punto crítico dentro de uno de los 4 casos enumerados, para tal fin procedemos a hallar las derivadas en cuestión:

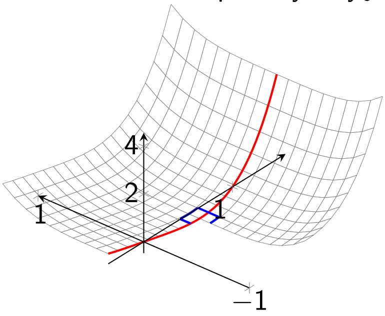
- $f_{xx}(x,y) = 12x^2$, entonces $f_{xx}(x_0,y_0) = 4.76$
- $f_{xy}(x,y) = 0$, entonces $f_{xy}(x_0,y_0) = 0$
- $f_{yy}(x,y) = 12y^2$, entonces $f_{yy}(x_0,y_0) = 0$
- Donde obtenemos que $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, pero $\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = 0$, por lo tanto, el punto podría ser un mínimo, pero el criterio del Hessiano no es concluyente.

- Analizamos la función $f(x, y)$ en $P(x_0, y_0) = P(0.63; 0)$, y obtenemos: $f(x_0, y_0) = -0.47247$
- Analizamos la función $f(x, y)$ en $P_{1,2}(x_0 - 0.1, y_0 \pm 0.1) = P_{1,2}(0.53; \pm 0.1)$, y obtenemos: $f(x_0 - 0.1, y_0 \pm 0.1) = -0.45$
- De lo analizado podemos observar que P es un punto más bajo que $P_{1,2}$, podemos afirmar parcialmente que P es punto mínimo de la función f.

Analizamos en el plano $x = x_0$:



Analizamos en el plano $y = y_0$:



- Recordando que el punto $P(x_0, y_0) = P(0.63; 0)$ en la función $f(x, y)$ toma el valor de:
  $f(x_0, y_0) = -0.47247$
- Analizamos la función $f(x, y)$ en $P_{3,4}(x_0 + 0.1, y_0 \pm 0.1) = P_{3,4}(0.73; \pm 0.1)$, y obtenemos:
  $f(x_0 + 0.1, y_0 \pm 0.1) = -0.446$
- De lo analizado podemos observar que P es un punto más bajo que $P_{1,2,3,4}$, podemos afirmar que P es punto mínimo de la función f.

Para aproximarnos a un punto mínimo en la función f a través del método de Newton asumimos un valor donde esperamos que exista un punto mínimo, por ejemplo para nuestro caso usaremos el punto $K(x_k, y_k) = (0.5, 0.5)$ entonces calculamos un punto más próximo al mínimo esperado al que llamaremos $K+1$, con la siguiente expresión:

$$X_{K+1} = X_K - H_f^{-1}(X_K) * \nabla f(X_K)$$

donde:

- X_K: es el punto K expresado vectorialmente, es decir, en nuestro caso $X_K = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$.
- $H_f^{-1}(X_K)$: es la inversa del Hessiano de la función f evaluada en el punto K.
- $\nabla f(X_K)$: es la gradiente de la función f evaluada en el punto K.

cómo vimos anteriormente el hessiano de la funcion f, está definido por:

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

y la gradiente no es mas qué:

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x^3 - 1 \\ 4y^3 \end{bmatrix}$$

Es decir calcularemos, para nuestro caso particular:

$$X_{K+1} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 4x^3 - 1 \\ 4y^3 \end{bmatrix}$$

- Realizamos la primeraa iteración haciendo $\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$, de donde obtenemos:
  $$X_{K+1} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12(0.5)^2 & 0 \\ 0 & 12(0.5)^2 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 4(0.5)^3 - 1 \\ 4(0.5)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6666 \\ 0.3333 \end{bmatrix}$$
- Realizamos la segunda iteración haciendo $\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.666 \\ 0.333 \end{bmatrix}$, de donde obtenemos:
  $$X_{K+1} = \begin{bmatrix} 0.666 \\ 0.3333 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12(0.666)^2 & 0 \\ 0 & 12(0.333)^2 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 4(0.666)^3 - 1 \\ 4(0.333)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6319 \\ 0.2222 \end{bmatrix}$$
- Realizamos la tercera iteración haciendo $\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6319 \\ 0.2222 \end{bmatrix}$, de donde obtenemos:
  $$X_{K+1} = \begin{bmatrix} 0.6319 \\ 0.2222 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12(0.6319)^2 & 0 \\ 0 & 12(0.2222)^2 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 4(0.6319)^3 - 1 \\ 4(0.2222)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.63 \\ 0.1481 \end{bmatrix}$$

- Realizamos la cuarta iteración haciendo $\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.63 \\ 0.1481 \end{bmatrix}$, de donde obtenemos:
$$X_{K+1} = \begin{bmatrix} 0.63 \\ 0.1481 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12(0.63)^2 & 0 \\ 0 & 12(0.1481)^2 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 4(0.63)^3 - 1 \\ 4(0.1481)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.63 \\ 0.0987 \end{bmatrix}$$
- Realizamos la quinta iteración haciendo $\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.63 \\ 0.0987 \end{bmatrix}$, de donde obtenemos:
$$X_{K+1} = \begin{bmatrix} 0.63 \\ 0.0987 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12(0.63)^2 & 0 \\ 0 & 12(0.0987)^2 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 4(0.63)^3 - 1 \\ 4(0.0987)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.63 \\ 0.0658 \end{bmatrix}$$

Como hemos visto, el método lleva a la convergencia del punto inicial elegido hacia el punto crítico que calculamos analíticamente.

Método de Newton V

Finalmente, para saber si el punto encontrado es un máximo o un mínimo local, tenemos que evaluar f_{xx}, al igual que en el método analítico, si $f_{xx} < 0$, entonces estamos hablando de un máximo local, si, por el contrario $f_{xx} > 0$, entonces el punto analizado es un mínimo local.

Resolución por algoritmos genéticos I

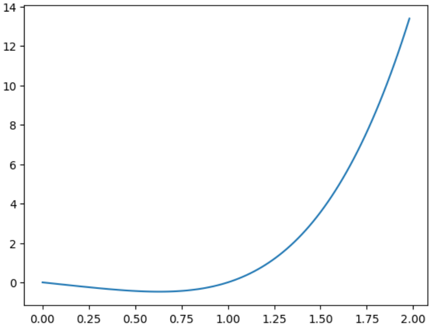
Los algoritmos genéticos tienen cinco etapas

- Definición de un individuo
- Creación de una población
- Medición del éxito de la población
- Entrecruzamiento entre los mejores individuos para crear la siguiente generación
- Aplicación de mutaciones en los individuos de la nueva generación

A continuación veremos la aplicación de esas etapas en el problema propuesto, asumiendo que el $y_{critico}$ es conocido y es igual a 0.

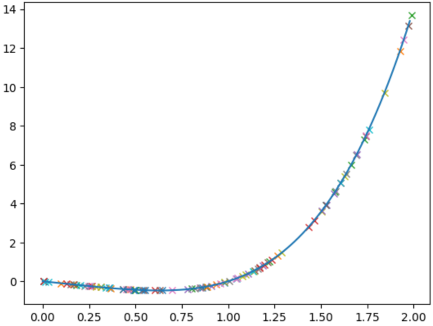
$$f(x,0) = x^4 + 0^4 - x = f(x) = x^4 - x$$

Para comenzar, iniciamos, proyectando la imagen de nuestra función de análisis:



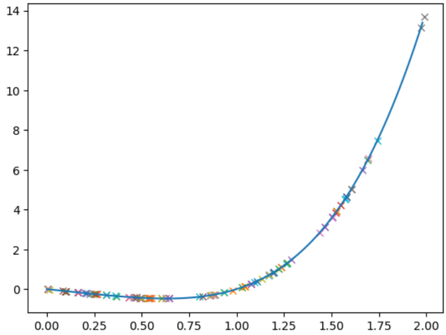
Para este trabajo utilizamos un repositorio de GitHub con su aplicación para la maximización de funciones.[5]

Generamos nuestra primera población:



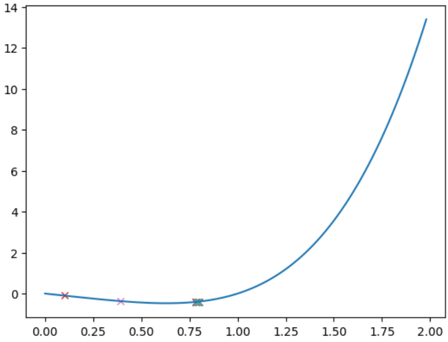
A estos puntos los premiaremos cuando su valor sea mínimo y los castigaremos cuando el valor no cumpla con ese criterio, a esta evaluación se le conoce como "fitness"

Luego de la primera generación, vemos que la distribución se ha movido ligeramente, pero no lo suficiente como para ser concluyente:



Hay que resaltar que en todas las generaciones se aplicó una mutación, es decir, se vario uno de los genes de algunos individuos de manera aleatoria.

Luego de 100 generaciones, la población se ha distribuido de la siguiente manera:



Resolución por algoritmos genéticos VI

El valor de x que arroja el mínimo en esta función ha sido $x = 0.796$, un valor cercano al valor calculado, pero como hemos podido observar, luego de una determinada cantidad de generaciones, seguramente será posible obtener un valor más cercano al valor calculado analíticamente.
Si queremos seguir generando poblaciones, podemos utilizar el siguiente enlace hecho en Google Coolab para esta función: Enlace de Coolab

[5] Teniente, 2020.

Referencias I

- Basset Salom, L., & Guardiola Villora, A. (2015). *Estructuras formadas por cables.* https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/13615/Estructurasformadasporcables.pdf?sequence=1
- Ivorra, C. (2012). *La Catenaria.* https://www.uv.es/~ivorra/Libros/Catenaria.pdf
- Teniente, D. (2020). *Maximizar una funcion.* https://github.com/danielTeniente/ia-projects/blob/main/Algoritmos_geneticos/Maximizar_funcion.ipynb
- Unidad Docente de Matemáticas de la ETSITGC de la Universidad Politécnica de Madrid. (2017). *Máximos y mínimos de una función real de dos variables reales.* http://asignaturas.topografia.upm.es/matematicas/segundo/Apuntes%20MII/Extremos_varias_variables.pdf