

Rapport de TIPE

Avance du Périhélie de Mercure

JJ Fleck, PCSI₁, 2015-2016

23 août 2016

Résumé

Relativity is one of the most beautiful theories we can come across in physics. It has some magic in it as it is mainly based on mere « thought experiments ». Nevertheless, in Physics, it is experimental evidence that decides whether a theory is worth developing and the advance of Mercury's perihelion was one of the most exciting moments of truth Einstein faced with its « General Relativity » theory.

In this work, we tried to understand how some glimpses of relativity could shed light on one of the late XIXth century mysteries.

1 Introduction à la dynamique relativiste : relation fondamentale et conservation de l'énergie

On peut s'interroger sur la forme que prendra la généralisation relativiste de la relation fondamentale de la dynamique newtonienne :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F} \quad \text{avec} \quad \vec{p} = m\vec{v} \quad (1)$$

On retrouve en fait la même formulation, mais avec cette fois

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

dont découle une nouvelle forme de la dérivée du vecteur quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} m\vec{v} \quad (3)$$

On remarque qu'ainsi, le vecteur accélération du point matériel auquel on applique la relation n'est plus nécessairement colinéaire à la résultante des forces appliquées à ce point.

On peut aussi démontrer un nouveau théorème de l'énergie :

$$\frac{d}{dt}(E_0 + E_c + E_p) = \mathcal{P}' \quad (4)$$

où \mathcal{P}' représente la puissance des forces non conservatives, E_p l'ensemble des énergies potentielles des forces conservatives, $E_c = (\gamma - 1) m c^2$ une nouvelle définition de l'énergie cinétique et $E_0 = m c^2$ l'énergie propre de l'objet directement proportionnelle à sa masse.

Pour ce qui est de la nouvelle définition de l'énergie cinétique, on peut remarquer qu'en développant $\gamma - 1$ au premier ordre en $\frac{v^2}{c^2}$, on retrouve la formule bien connue : $E_c = \frac{m v^2}{2}$.

Dans le cas (courant en astronomie) où la puissance des forces non conservatives est négligeable, on obtient la relation :

$$E_0 + E_c + E_p = E = \text{C}^{\text{te}} \quad (5)$$

2 Application à une planète A soumise à la force gravitationnelle d'une étoile placée en O

La relation fondamentale, pour une planète de masse m , s'écrit

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r} \quad (6)$$

avec $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ et M masse de l'étoile exerçant la force.

On peut montrer dans une telle situation (voir équation 26 dans les annexes, page 6) que le moment cinétique de la planète est constant et que le mouvement est donc plan. On obtient, avec $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ où \wedge est le produit vectoriel,

$$L = \gamma m r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{C}^{\text{te}} \quad (7)$$

En utilisant la conservation de l'énergie qui permet d'atteindre γ et son expression littérale que l'on va exprimer en fonction de la nouvelle variable $u = 1/r$ et de ses dérivées en fonction de θ (cf équation 34, page 7), on arrive à l'équation

$$\boxed{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{G M m E}{L^2 c^2} + \frac{(G M m)^2}{L^2 c^2} u} \quad (8)$$

Qui se réduit à
$$\frac{du}{d\theta} + B^2 u = A \quad \text{avec} \quad B^2 = 1 - \left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2 \quad (9)$$

On obtient donc
$$r = \frac{p}{1 + e \cos[B(\theta - \theta_0)]} \quad (10)$$

où
$$p = \frac{L^2 c^2 - (GMm)^2}{GMm E} \quad \text{et} \quad e = C \frac{B^2}{A} \quad (11)$$

avec C constante d'intégration. Si $e < 1$, comme c'est le cas pour Mercure, on observe sensiblement une ellipse avec la particularité de ne pas se refermer sur elle-même. Entre deux passages au point le plus proche du soleil de son orbite ($\cos[B(\theta - \theta_0)] = 1$), son vecteur position aura tourné d'un angle $2\pi + \delta$ avec l'expression suivante de δ

$$\delta = 2\pi \left(\frac{1}{B} - 1 \right) \approx \pi \left(\frac{GMm}{Lc} \right)^2 = \pi \frac{GM}{pc^2} = \pi \frac{GM}{ac^2(1-e^2)} \quad (12)$$

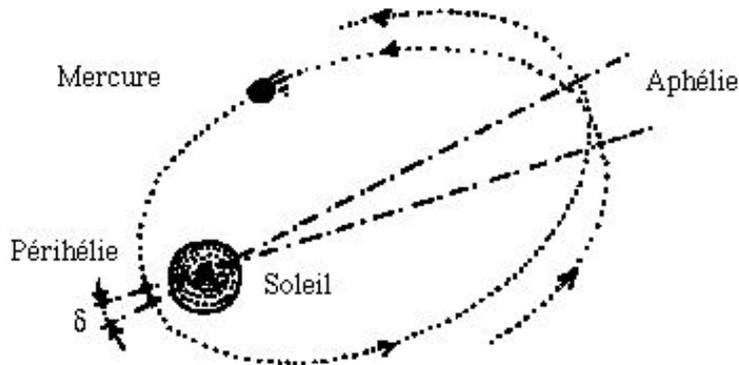


FIGURE 1 – Illustration du phénomène de précession du périhélie

Malheureusement, les valeurs numériques pour Mercure ne donnent qu'une précession de $7''$ d'angle par siècle et non pas les $43''$ d'angle par siècle escomptées : il manque le facteur 6 que l'on trouvera dans la formule donnée par la relativité générale. Il est néanmoins intéressant de constater que la relativité, même restreinte, donne déjà une orbite qui précède là où Newton ne voit qu'une ellipse stable.

2.1 Le point de vue de la relativité générale

Le développement de la relativité générale provient de la remarque d'Einstein portant sur l'identité (à priori non triviale) entre masse grave et masse inerte. La masse grave est celle que l'on prend en compte lorsque l'on décrit l'interaction gravitationnelle entre 2 corps. La masse inerte, en revanche, est celle que l'on utilise pour écrire la relation fondamentale de la dynamique :

$$m \vec{a} = \sum \vec{F} \quad (13)$$

Plusieurs expériences ont tendu à prouver au fil des siècles l'identité de ces deux notions (ou au moins un facteur de proportionnalité entre elles). Partant de cette constatation, Einstein a posé l'équivalence entre le champ gravitationnel et l'accélération : aucune expérience ne peut révéler de différence entre un laboratoire local accéléré et son analogue sur la terre soumis à la gravitation.

Il en découle que l'interprétation de la gravitation en terme d'interaction résulterait de la place privilégiée accordée aux référentiels galiléens alors que rien ne la justifie à priori dans la théories newtonienne ou celle de la relativité restreinte. Einstein en est donc arrivé à développer un espace-temps qui contiendrait déjà en lui l'interaction gravitationnelle, tout comme il apparaît des accélérations d'entraînement et de Coriolis dans un référentiel non galiléen en mécanique classique.

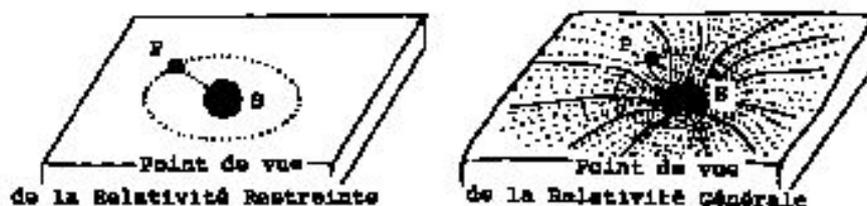


FIGURE 2 – Comparaison des deux visions

2.2 Particule au voisinage d'une masse à symétrie sphérique

On peut toujours appliquer la relation fondamentale de la dynamique généralisée, mais la différence introduite par la relativité générale prend forme dans l'expression de la vitesse qui ne s'écrit plus en coordonnée polaire :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \quad (14)$$

mais, avec la nouvelle métrique où $r_0 = \frac{GM}{c^2}$,

$$\vec{v} = \frac{1}{1 - 2 \frac{r_0}{r}} \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + \frac{r}{\sqrt{1 - 2 \frac{r_0}{r}}} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \quad (15)$$

De même, l'énergie s'exprime à présent

$$E = \gamma m c^2 \sqrt{1 - 2 \frac{r_0}{r}} = \text{C}^{\text{te}} \quad (16)$$

pour le cas céleste. On montre comme précédemment que le moment cinétique \vec{L} de la planète est constant et vaut :

$$\vec{L} = \frac{\gamma m r^2}{\sqrt{1 - 2 \frac{r_0}{r}}} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z \quad (17)$$

Après substitution de v^2 en fonction de γ et introduction de la variable $u = 1/r$ (cf annexe 1), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2} \quad (18)$$

Vis à vis de l'équation Newtonienne, il apparaît un terme quadratique d'amplitude très faible qui induira la précession observée de Mercure de $43''$ d'angle par siècle. La résolution de cette équation avec Maple (cf annexe 2) donne la formule suivante pour l'avance sur une période :

$$\boxed{\delta = 6 \pi \frac{GM}{a c^2 (1 - e^2)}} \quad (19)$$

Et l'application numérique correspondante pour un siècle donne bien les $43''$ manquantes.

3 Conclusion

Au milieu du siècle, d'autres théories se sont développées avec l'ambition de surpasser la relativité dans son application à l'avancée du périhélie de Mercure. Plus exactement, par l'intervention de nouvelles notions dans le cadre de la mécanique classique, elles essayèrent de rajouter quelques secondes d'angle à la contribution newtonienne, ce qui aurait pour effet de rendre la correction relativiste trop importante et invaliderait donc la théorie.

La prise en compte de la non sphéricité parfaite du soleil par les détracteurs de la relativité déboucha notamment sur la constatation que, passée une certaine

valeur de cette non-sphéricité, on observerait effectivement une précession d'origine non-relativiste. Malheureusement pour cette théorie, les dernières mesures effectuées dans ce domaine penchent pour une correction minimale due à cet effet et la prédiction relativiste s'accorde encore aujourd'hui merveilleusement bien aux incertitudes d'observation.

A Calculs

A.1 Le point de vue de la relativité restreinte

Posons les notations suivantes :

$$\text{Vecteur position de la particule} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OA} = r \vec{e}_r \quad (20)$$

$$\text{Vecteur vitesse de la particule} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta \quad (21)$$

$$\text{Quantité de mouvement de la particule} \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (22)$$

$$\text{Moment cinétique de la particule } A \text{ en } O \quad \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (23)$$

Remarquons que, comme $\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} = \vec{v} \wedge \gamma m \vec{v} = \vec{0}$, on a

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (24)$$

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à la planète

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r} \quad (25)$$

$$\text{d'où} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad (26)$$

On a *conservation du moment cinétique*, le mouvement est donc plan. Par conséquent

$$\vec{L} = L \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad L = \gamma m r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{C}^{\text{te}} \quad (27)$$

On a aussi *conservation de l'énergie*, avec $E_c = (\gamma - 1) m c^2$ et $E_0 = m c^2$,

$$E_0 + E_c + E_p = \gamma m c^2 - \frac{GMm}{r} = E = C^{\text{te}} \quad (28)$$

On introduit la variable $u = 1/r$ et on en déduit une expression de γ

$$\gamma = \frac{E + GMm u}{m c^2} \quad (29)$$

On va extraire de la vitesse une autre expression de γ

Comme
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (30)$$

On en déduit
$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad (31)$$

Or
$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (32)$$

Exprimons $\frac{dr}{dt}$ et $r \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de la nouvelle variable $u = \frac{1}{r}$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\gamma m r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{\gamma m} \frac{du}{d\theta} \quad (33)$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = r \frac{L}{\gamma m r} = \frac{L}{\gamma m} u \quad (34)$$

D'où l'expression de γ^2 , au premier ordre en $\frac{v^2}{c^2}$,

$$\gamma^2 = 1 + \frac{v^2}{c^2} = 1 + \left(\frac{L}{m c}\right)^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \right] \quad (35)$$

Or
$$\gamma^2 = \left(\frac{E + GMm u}{m c^2}\right)^2 \quad (36)$$

On en déduit l'équation
$$u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{m c}{L}\right)^2 \left[\left(\frac{E + GMm u}{m c^2}\right)^2 - 1 \right] \quad (37)$$

En dérivant cette équation par rapport à θ , en simplifiant par $2 \frac{du}{d\theta}$, on obtient

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \left(\frac{mc}{L}\right)^2 \left(\frac{E + GMmu}{mc^2}\right)^2 \frac{GMm}{mc^2} \quad (38)$$

En redéveloppant les différents termes, on obtient

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMmE}{L^2c^2} + \frac{(GMm)^2}{L^2c^2}u} \quad (39)$$

Qui se réduit à $\frac{d^2u}{d\theta^2} + B^2u = A$ avec $B^2 = 1 - \left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2$ (40)

On obtient donc $r = \frac{p}{1 + e \cos [B(\theta - \theta_0)]}$ (41)

où $p = \frac{L^2c^2 - (GMm)^2}{GMmE}$ (42)

... Vous avez compris, je m'arrête là

B Code Python

Cette section est juste là pour montrer comment on peut rajouter du code Python depuis l'intérieur du code L^AT_EX.

```

1 import numpy as np
2 import scipy as sp
3 import scipy.integrate
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 # Mettez ici des choses intéressantes sachant que PythonTeX
7 # n'est malheureusement pas encore capable (sur overleaf) de
8 # fonctionner avec Numpy, Scipy et matplotlib, donc mieux vaut
9 # tester le programme dans Pyzo et le recopier ici quand on est
10 # sûr du résultat.
```