

# Platonische transformatiegroepen

Luc Van den Broeck

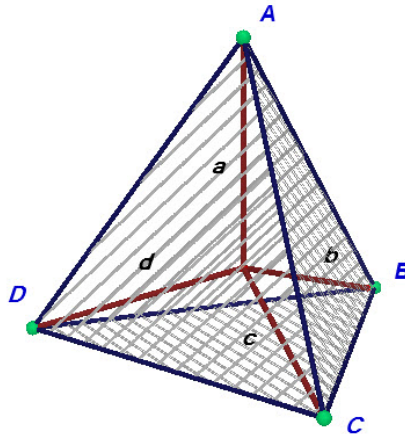
8 augustus 2015

## Samenvatting

In dit document worden de transformatiegroepen van de platonische lichamen bestudeerd. Zonder te vervallen in algebraïsche berekeningen worden verbanden gelegd met de symmetrische en de alternerende groepen. De redeneringen die gemaakt worden zijn hoofdzakelijk meetkundig. We beschouwen de platonische lichamen in deze analyse als starre objecten. Rotaties van deze lichamen zijn de enige mogelijke transformaties die we zullen onderzoeken. Hoewel al deze lichamen symmetrievlakken hebben, laten we de vlakspiegeling, die verkregen kunnen worden door rubberen lichamen binnenstebuiten te keren, meestal buiten beschouwing.

## 1 De transformatiegroep van de tetraeder

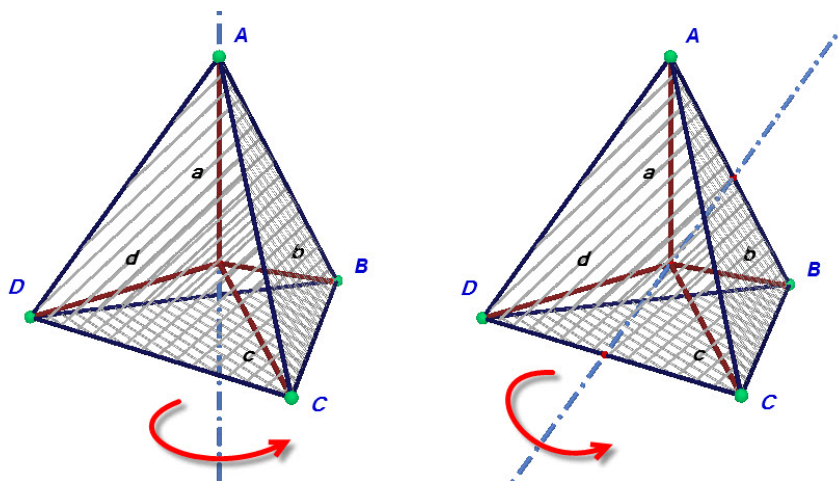
De tetraeder of het regelmatig viervlak is het eenvoudigste platonische veelvlak. We kunnen een tetraeder volledig beschrijven door de opsomming van de hoekpunten,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  en  $D$ . Maar voor dit onderzoek kunnen we een tetraeder vaak beter typeren door middel van de inwendige *kraaienpoot*. Hiermee bedoelen we de unie van de vier lange zwaartelijnstukken,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$ , die in het zwaartepunt samenkomen, zie figuur 1.



Figuur 1: De tetraeder

Er zijn twee soorten rotaties die de tetraeder op zichzelf afbeelden: de rotatie over  $120^\circ$  en over  $240^\circ$  rond een zwaartelijns van de tetraeder en de rotatie over

180° rond een verbindingslijn van de middens van twee overstaande ribben van de tetraeder, zie figuur 2. Van de eerste soort rotaties zijn er acht (vier assen met telkens twee rotatiehoeken) en van de tweede zijn er drie (zes ribben vormen drie paar overstaande ribben). Om een groepsstructuur te hebben moeten we ook de identieke transformatie meerekenen. Deze transformatie doet helemaal niets. Maar het neutrale element mag niet ontbreken in een groep. In totaal zijn er dus 12 transformaties die een starre tetraeder op zichzelf afbeelden.



Figuur 2: Symmetrieën van de tetraeder

We noteren de rotaties over een hoek van 180° of de *lijnspiegelingen* nu in cykelnotatie. Bij de rotatie over een as die de middens van de zijden  $[AB]$  en  $[CD]$  verbindt (zie afbeelding 2 rechts) zien we dat de punten  $A$  en  $B$  omgewisseld worden, alsook de punten  $C$  en  $D$ . We merken ook dat de lijnstukken  $a$  en  $b$  omgewisseld worden, net zoals de lijnstukken  $c$  en  $d$ . Vandaar dat er een dubbel notatie bestaat voor deze transformatie:

$$(AB)(CD) \text{ of } (ab)(cd).$$

Beide notaties maken gebruik van twee omwisselingen of *transposities*. Dat het aantal transposities even is, blijkt typerend te zijn.

Vervolgens noteren we de rotaties over hoeken van 120° en 240° in cykelnotatie. De rotatie van afbeelding 2 links beeldt  $A$  af op zichzelf,  $B$  op  $D$ ,  $D$  op  $C$  en  $C$  op  $B$ . We kunnen ook zeggen dat  $a$  op zichzelf wordt afgebeeld,  $b$  op  $d$ ,  $d$  op  $c$  en  $c$  op  $b$ . Aldus kunnen we deze transformatie ook weer op twee manieren noteren. Merk op: cyclen met één element worden niet genoteerd.

$$(BDC) \text{ of } (bdc).$$

In tegenstelling met de vorige notatie maakt deze notatie geen gebruik van transposities. Maar we kunnen een 3-cykel wel ontbinden in een samenstelling van even aantal transposities. Deze samenstelling lezen we klassiek van rechts naar links:

$$(BD)(DC) \text{ of } (bd)(dc).$$

Van rechts naar links zien we onder andere dat C naar D gaat en D naar B, dus dat C naar B gaat. Dit was ook zo bij de notatie met de 3-cykel. Ook de andere beelden blijven ongewijzigd bij deze nieuwe notatie (ga dit na!). Dat de pariteit van het aantal transposities even is, is ook hier weer opvallend.

Enkel de identieke transformatie blijft nu nog over. Deze beeldt elk punt (of elk lijnstuk) op zichzelf af. In cykelnotatie wordt deze transformatie:

$$(A)(B)(C)(D) \text{ of } (a)(b)(c)(d) \text{ of kortweg } ().$$

In elk van deze notaties is het aantal transposities gelijk aan nul. Het is perfect mogelijk om een andere notatie te gebruiken voor de identieke transformatie. Welke manier we ook kiezen, het aantal transposities zal even zijn, bijvoorbeeld:

$$(AB)(AB)(CD)(CD) \text{ of } (ab)(ab)(cd)(cd).$$

Er is immers een eigenschap die zegt dat de pariteit van het aantal transposities van een permutatie van een aantal elementen onafhankelijk is van de cykelnotatie.

De twaalf transformaties van de tetraeder worden alle getypeerd door een even permutatie van de hoekpunten (of van de zwaartelijnstukken). De groep van alle even permutaties van vier symbolen noemen we de *alternerende groep van orde vier*, afgekort tot  $\mathcal{A}(4)$ . De Cayleytabel van deze groep van even permutaties vind je in figuur 3. Het element *ee* (grijs) is de identieke transformatie. De elementen  $u_i$  (rood) zijn de rotaties over  $180^\circ$  en de elementen  $r_i$  (groen en blauw) zijn de rotaties over  $120^\circ$  en over  $240^\circ$ .

	ee	u1	u2	u3	r6	r3	r2	r7	r5	r1	r8	r4
ee	ee	u1	u2	u3	r6	r3	r2	r7	r5	r1	r8	r4
u1	u1	ee	u3	u2	r2	r7	r6	r3	r4	r8	r1	r5
u2	u2	u3	ee	u1	r7	r2	r3	r6	r1	r5	r4	r8
u3	u3	u2	u1	ee	r3	r6	r7	r2	r8	r4	r5	r1
r6	r6	r7	r3	r2	r4	r5	r8	r1	u2	u1	u3	ee
r3	r3	r2	r6	r7	r1	r8	r5	r4	u1	u2	ee	u3
r2	r2	r3	r7	r6	r5	r4	r1	r8	u3	ee	u2	u1
r7	r7	r6	r2	r3	r8	r1	r4	r5	ee	u3	u1	u2
r5	r5	r8	r4	r1	u1	u3	u2	ee	r7	r3	r6	r2
r1	r1	r4	r8	r5	u3	u1	ee	u2	r6	r2	r7	r3
r8	r8	r5	r1	r4	u2	ee	u1	u3	r2	r6	r3	r7
r4	r4	r1	r5	r8	ee	u2	u3	u1	r3	r7	r2	r6

Figuur 3: Cayleytabel van de alternerende groep  $\mathcal{A}(4)$

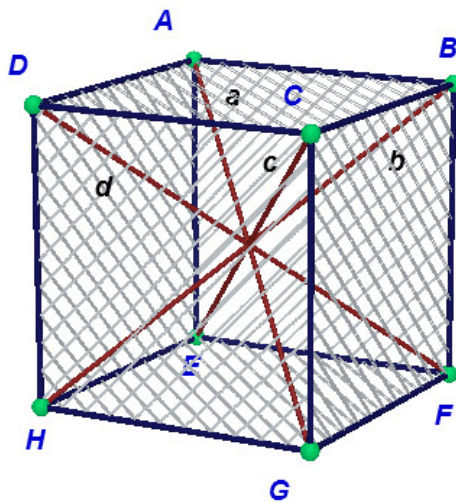
**Opmerking 1** *Uit de kleurencombinatie van het  $4 \times 4$ -blok linksboven leiden we af dat de verzameling  $\{ee, u_1, u_2, u_3\}$  een deelgroep vormt van  $A(4)$ . Deze deelgroep is isomorf met de Viergroep van Klein.*

**Opmerking 2** *Mochten ook de vlakspiegelingen meegerekend worden dan behoorden ook de oneven permutaties tot de transformatiegroep van de tetraeder. De groep zou dan 24 elementen bevatten. We noemen de groep die de rubberen tetraeder op zichzelf afbeeldt de symmetrische groep van orde vier, afgekort tot  $S(4)$ . Deze groep zullen we ook ontmoeten in het volgende hoofdstuk.*

**Opmerking 3** *Als we de verzameling van de rood of grijs gekleurde permutaties  $\{ee, u_1, u_2, u_3\}$  als één element beschouwen, alsook de verzameling van de groen gekleurde permutaties  $\{r_2, r_3, r_6, r_7\}$  en de verzameling van de blauw gekleurde permutaties  $\{r_1, r_4, r_5, r_8\}$  dan verkrijgen we een quotiëntgroep waarop de samenstellingswet volledig bepaald is door de inkleuring van de Cayleytabel van  $A(4)$ . Deze quotiëntgroep telt drie elementen en is bijgevolg isomorf met de groep  $\mathbb{Z}_3, +$ .*

## 2 De transformatiegroep van de kubus

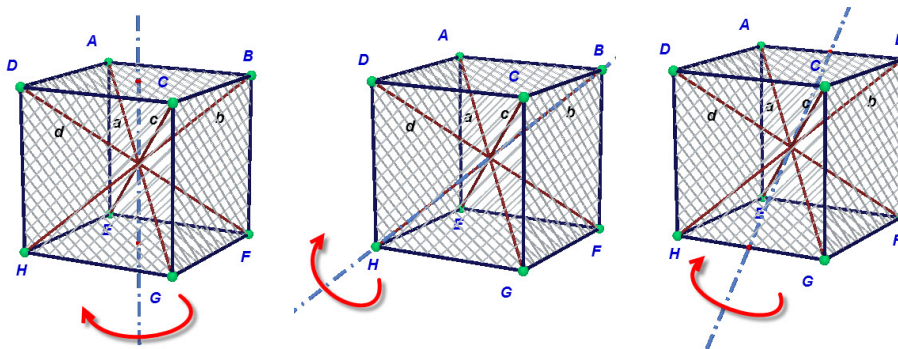
De kubus of de *hexaeder* is een platonisch lichaam waarvan de zes zijvlakken vierkanten zijn. Ze komen telkens met drie in een hoekpunt samen. De kubus is helemaal bepaald door de acht hoekpunten. In figuur 4 zijn de punten beletterd als  $A, B, C, D, E, F, G$  en  $H$ . Maar hij wordt eveneens volledig bepaald door het diagonalenkruis. Hiermee bedoelen we de unie van de vier diagonaalstukken  $a, b, c$  en  $d$ , zie ook figuur 4.



Figuur 4: De kubus

Er zijn drie soorten transformaties van de kubus, zie figuur 5. Vooreerst is er een rotatie van orde vier rond een as die de middelpunten van twee tegenoverliggende zijvlakken verbindt. Vervolgens zijn er rotaties van orde drie rond

de ruimtediagonalen van de kubus. En tot slot zijn er rotaties van orde twee rond assen die de middens van tegenoverliggende ribben verbinden. Als we de identieke niet meetellen zijn er negen transformaties van de eerste soort (drie assen met telkens drie verschillende rotatiehoeken), zijn er acht van de tweede soort (vier ruimtediagonalen met telkens twee verschillende rotatiehoeken) en zijn er zes van de derde soort (twaalf ribben vormen zes paren tegenovergestelde ribben). Tellen we de identieke transformatie opnieuw mee dan vinden we in totaal  $9+8+6+1=24$  transformaties van de starre kubus.



Figuur 5: Symmetrieën van de kubus

De linkse afbeelding van figuur 5 laat een rotatie zien over een hoek van  $90^\circ$ . Deze transformatie kan omschreven worden door de volgende cykelnotatie:

$$(ABCD)(EFGH).$$

Deze notatie betekent dat  $A$  naar  $B$  gaat,  $B$  naar  $C$ ,  $C$  naar  $D$  en  $D$  naar  $A$ . Eenzelfde doorschuiving is er voor de punten  $E$ ,  $F$ ,  $G$  en  $H$ . Ditmaal kunnen we de cykelnotatie vereenvoudigen door over te schakelen op de lijnstukken van het diagonalenkruis:

$$(abcd),$$

wat betekent dat de diagonaal  $a$  doorschuift naar  $b$ ,  $b$  naar  $c$ ,  $c$  naar  $d$  en  $d$  naar  $a$ . Omdat het eenvoudiger is te werken met het diagonalenkruis dan met de hoekpunten, zullen we vanaf nu met de kleine letters werken. De cykel met de lijnstukken van het diagonalenkruis kan ook weer ontbonden worden in een aaneenschakeling van transposities:

$$(ab)(bc)(cd).$$

Er zijn nog andere manieren om deze cykel om te zetten naar een aaneenschakeling van transposities maar ze hebben alle gemeen dat het aantal transposities van de ruimtediagonalen oneven is. Dit is zowel het geval bij een rotatie over een hoek van  $90^\circ$  als bij een rotatie over een hoek van  $270^\circ$ . Bij de rotaties over een hoek van  $180^\circ$  is het aantal transposities even. Een voorbeeld hiervan is:

$$(ad)(bc).$$

De middelste afbeelding van figuur 5 toont een rotatie over een hoek van  $120^\circ$ . Het vraagt wel wat ruimtelijk inzicht om deze rotatie te begrijpen. Het kan

eventueel helpen een tastbaar exemplaar bij de hand te hebben. De cykelnotatie van deze rotatie is nu:

$$(adc).$$

De diagonaal  $a$  gaat naar  $d$ ,  $d$  gaat naar  $c$  en  $c$  gaat naar  $a$ . Diagonaal  $b$  ligt op de rotatie-as en wordt bijgevolg op zichzelf afgebeeld. De omzetting naar transposities toont aan dat het hier gaat om een even permutatie:

$$(ad)(dc).$$

Tot slot kijken we naar de rechtse afbeelding van figuur 5. We kunnen de rotatie over een hoek van  $180^\circ$  of de lijnspiegeling, die een actie uitvoert op de diagonalen van de kubus, als volgt noteren:

$$(ab).$$

Dit betekent dat de diagonalen  $a$  en  $b$  uitwisselen. De diagonalen  $c$  en  $d$  worden op zichzelf afgebeeld. Dat is te begrijpen want de eindpunten van  $c$  zijn lijnsymmetrisch ten opzichte van de rotatie-as. Hetzelfde geldt voor de eindpunten van  $d$ . De bovenstaande cykelnotatie laat zien dat het hier gaat over een oneven permutatie.

Zoals we ook al bij de tetraeder opmerkten, is de identieke transformatie een even permutatie. Samenvattend kunnen we stellen dat er 12 even permutaties van de ruimtediagonalen zijn (de identieke, 3 rotaties over  $180^\circ$  van de eerste soort en 8 rotaties over  $120^\circ$  en  $240^\circ$  van de tweede soort). Er zijn ook 12 oneven permutaties (6 rotaties over  $90^\circ$  en  $270^\circ$  van de eerste soort en 6 rotaties over  $180^\circ$  van de derde soort). De 24 permutaties van de diagonalen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  vormen een groep die gekend is als de *symmetrische groep van orde vier*, afgekort tot  $S(4)$ . Het is niet meer mogelijk om de cayleytabel van deze groep op een leesbare manier binnen de bladspiegel van tekst op te nemen. De tabel zou immers  $25 \times 25$  vakjes tellen.

**Opmerking 4** *Het regelmatige achthoekvlak of de octaeder heeft dezelfde transformatiegroep als de kubus. Je kan dit zien door de octaeder in te schrijven in de kubus: de hoekpunten van de octaeder zijn de middelpunten van de zijvlakken van de kubus. Elke rotatie die de kubus invariant laat, laat ook de octaeder invariant. Algemener nog kunnen we zeggen dat duale (platonische of archimedische) lichamen dezelfde symmetriegroep hebben.*

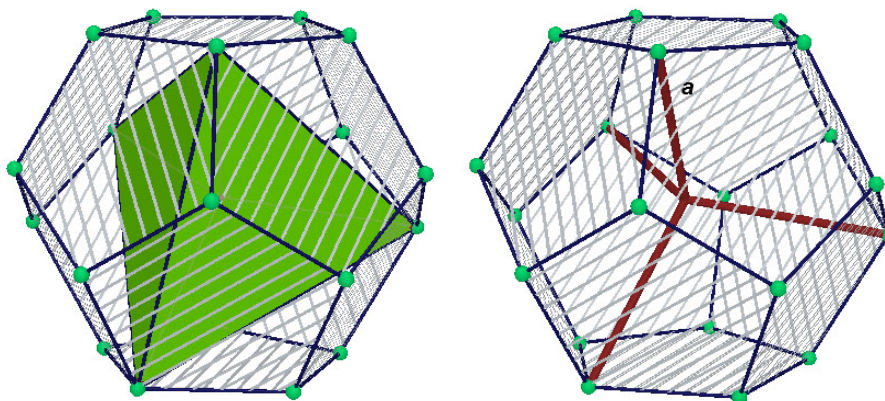
**Opmerking 5** *De afgeknotte kubus heeft dezelfde transformatiegroep als de kubus. Als je de afgeknotte kubus inschrijft in de kubus dan merk je dat alle rotaties die de kubus invariant laten ook de afgeknotte kubus op zichzelf afbeelden. In het bijzonder heeft de kubuoctaëder  $S(4)$  als symmetriegroep.*

### 3 De transformatiegroep van de dodecaeder

Het analyseren van de transformatiegroep van het regelmatige twaalfvlak of de *dodecaeder* is complex en weinig inzichtelijk indien we de transformaties laten inwerken op de twintig hoekpunten van de dodecaeder. De structuur van de transformatiegroep is duidelijker wanneer we de transformaties uitvoeren op *kraaienpoten* ingeschreven in de dodecaeder.

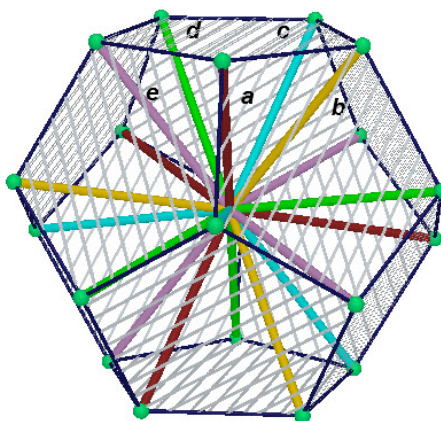


Als we vier goed gespreide hoekpunten van een dodecaeder uitkiezen, kunnen die regelmatig viervlak bepalen. Op de linkse afbeelding van figuur 6 zie je een groene tetraeder ingeschreven in een dodecaeder. Je kan met congruente driehoeken in de ruimte bewijzen dat de zes ribben van het groene viervlak gelijk zijn. Dit toont de regelmaat van het viervlak aan. Op de rechtse figuur is de dodecaeder vervangen door zijn ingeschreven *kraaienpoot*, benoemd met de letter *a*.



Figuur 6: Eén kraaienpoot in een dodecaeder

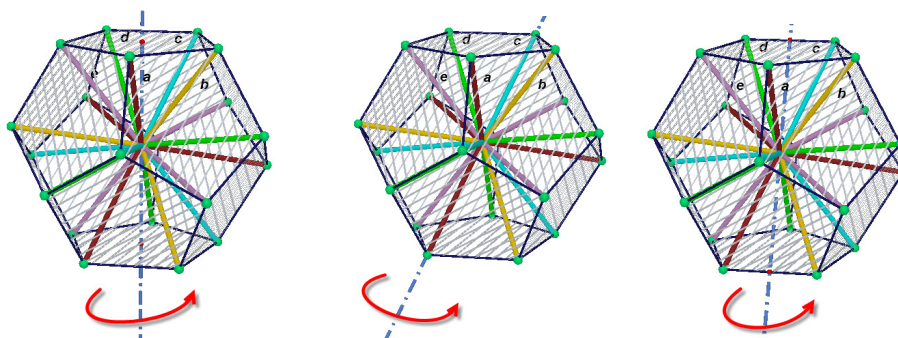
In totaal kan men vijf disjuncte kraaienpoten inschrijven in een dodecaeder. Figuur 7 laat dit zien. De vijf kraaienpoten zijn gekleurd in vijf verschillende kleuren. Ze dragen de namen *a*, *b*, *c*, *d* en *e*.



Figuur 7: Vijf kraaienpoten in een dodecaeder

Net zoals bij de kubus zijn er drie verschillend soorten rotaties mogelijk. Als we de identieke transformatie niet meetellen zijn er 24 rotaties rond assen die de middelpunten van tegenoverliggende zijvlakken verbinden (zes assen met telkens vier verschillende rotatiehoeken:  $72^\circ$ ,  $144^\circ$ ,  $216^\circ$  en  $188^\circ$ ). Er zijn 20

rotaties rond assen die tegenoverliggende hoekpunten verbinden (tien assen met telkens twee verschillende rotatiehoeken:  $120^\circ$  en  $240^\circ$ ). En tot slot zijn er 15 rotatie over hoeken van  $180^\circ$  rond assen die de middelpunten van overstaande ribben verbinden. Deze drie soorten rotaties zijn afgebeeld in figuur 8, resp. links, midden en rechts. We onderzoeken nu welke invloed deze transformaties nu hebben op de kraaienpoten.

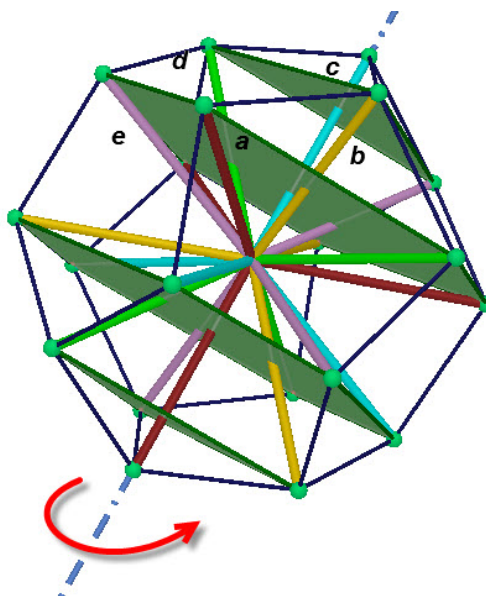


Figuur 8: Symmetrieën van de dodecaeder

De rotatie van figuur 8 links beeldt kraaienpoot  $a$  integraal af op  $b$ ,  $b$  op  $c$ ,  $c$  op  $d$ ,  $d$  op  $e$  en  $e$  op  $a$ . Dit is makkelijk van te figuur af te lezen. We noteren deze rotatie als:

$$(abdce) \text{ of als } (ab)(bc)(cd)(de).$$

Deze laatste cykelnotatie wijst op een even permutatie van de vijf kraaienpoten. Ook de rotaties rond andere assen die de middelpunten van tegenoverliggende vlakken verbinden, zijn even permutaties van de kraaienpoten.



Figuur 9: Rotatie rond ruimtediagonaal van de dodecaeder

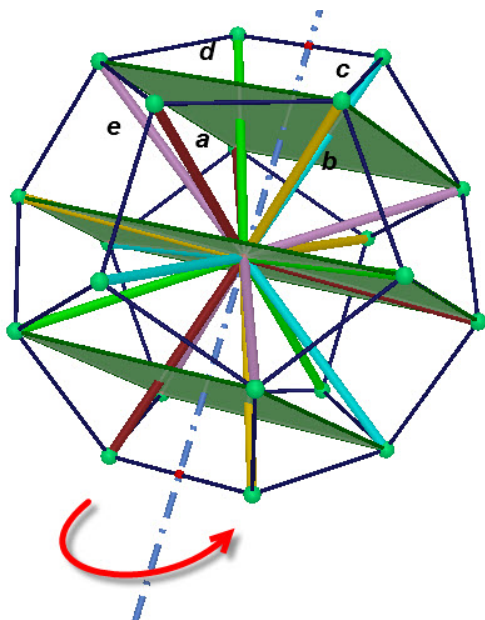


Voor de rotatie rond een ruimtediagonaal van de dodecaeder is het zeer moeilijk om te verifiëren dat kraaienpoten op kraaienpoten worden afgebeeld. Dit kan alleen wanneer we de figuur voldoende vergroten en wanneer we vier loodvlakken op de rotatie-as tekenen, zie figuur 9. Met een beetje moeite zie je nu dat de kraaienpoten  $a$  (donkerrood) en  $c$  (lichtblauw), die een been op de rotatie-as hebben, op zichzelf worden afgebeeld. De overige drie kraaienpoten (geel, paars, groen) wisselen uit in een 3-cykel. We noteren deze transformatie als:

$$(bed) \text{ of als } (be)(ed).$$

Alle rotaties van dit type blijken even permutaties te zijn.

Tot slot bekijken we de rotaties rond assen die de middens van overstaande ribben verbinden. Ook in dit geval is het niet meteen duidelijk dat kraaienpoten op kraaienpoten worden afgebeeld. In figuur 10 maakten we een vergroting van de situatie en voegden we drie loodvlakken op de rotatie-as toe.



Figuur 10: Rotatie rond as die middens van overstaande ribben verbindt

Uit deze figuur blijkt duidelijk dat kraaienpoot  $e$  (paars) op zichzelf wordt afgebeeld, dat de kraaienpoten  $a$  (donkerrood) en  $b$  (geel) uitwisselen en dat ook  $c$  (lichtblauw) en  $d$  (groen) uitwisselen. In cykelnotatie wordt dit:

$$(ab)(cd).$$

Ook dit type van rotaties komt overeen met een even permutatie.

Ook de identieke permutatie van vijf elementen is een even permutatie. In totaal hebben we dus  $1+24+20+15=60$  even permutaties van vijf kraaienpoten. Meer even permutaties van vijf elementen bestaan er niet. Vandaar de conclusie dat de transformatiegroep van de dodecaeder overeenkomt met de alternerende groep van orde 5, genoteerd als  $\mathcal{A}(5)$ .

**Opmerking 6** *Het regelmatige twintigvlak of de icosaeer is het duale lichaam van de dodecaeder. De icosaeer kan ingeschreven worden in de dodecaeder door alle zwaartepunten van de zijvlakken te verbinden. De symmetrieën van de dodecaeder blijken precies die van de icosaeer te zijn. De transformatiegroep van de icosaeer is bijgevolg ook gelijk aan  $A(5)$ .*

**Opmerking 7** *Ook de afknottingen van de icosaeer en de dodecaeder hebben dezelfde transformatiegroep. In het bijzonder zullen de voetbal (afgeknotte icosaeer) en de icosidodecaeder  $A(5)$  als symmetriegroep hebben.*

**Opmerking 8** *Door een foute analogie met de symmetriegroepen van de tetraeder zou je ervan uit kunnen gaan dat de volledige transformatiegroep van de dodecaeder, die bestaat uit rotaties én spiegelingen, isomorf zou zijn met  $S(5)$ . De volledige transformatiegroep van de dodecaeder bestaat weliswaar ook uit 120 elementen en heeft  $A(5)$  als deelgroep maar ze is verschillend van  $S(5)$ .*

*Men kan een rubberen dodecaeder in een willekeurige stand zetten door hem binnenstebuiten te keren (of te spiegelen rond een vlak) en hem daarna in de gewenste positie te roteren. Deze eerste actie is vervat in de cyclische groep  $C(2)$ , de tweede actie is vervat in de groep  $A(5)$ . De totale transformatiegroep is bijgevolg het directe product van  $C(2)$  en  $A(5)$ . Via Sage gaan we na dat deze groep niet isomorf is met de symmetrische groep  $S(5)$ , zie figuur 11. De groep is niet commutatief (niet Abels). Ze bevat 120 elementen en kan voortgebracht worden door drie generatoren (een vlakspiegeling van orde 2, een lijnrotatie van orde 3 en een lijnrotatie van orde 5).*

```

2
3 G1=AlternatingGroup(5)
4 G2=CyclicPermutationGroup(2)
5 D=direct_product_permgroups([G1,G2])
6
7 D.is_abelian()
8 False
9
10 D.order()
11 120
12
13 D.is_isomorphic(SymmetricGroup(5))
14 False
15
16 D.group_generators()
17 Family ((6,7), (3,4,5), (1,2,3,4,5))
18

```

Figuur 11: Transformatiegroep van de dodecaeder versus symmetrische groep