Inleveropgaven Basiswiskunde, Week 2

Sliem el Ela

19 September, 2016

Opgave 7, serie 3

Te bewijzen: Zij A, B, C verzamelingen. Bewijs $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
Bewijs:
Neem $z \in A \times (B \cap C)$ met $z = (x, y)$. Dus is $x \in A$ en $y \in (B \cap C)$.
Omdat $y \in (B \cap C)$, is $y \in B$ en $y \in C$. Dus als $x \in A$, $y \in B$ en $y \in C$ kunnen we zeggen dat $z \in A \times B$ en $z \in A \times C$. Nu kunnen we zeggen dat $z \in (A \times B) \cap (A \times C)$.
Nu mogen we zeggen dat $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$.

Neem $z \in (A \times B) \cap (A \times C)$, met $z = (x, y)$. Dus is $x \in A$ èn $y \in B$ en $y \in C$. Dus is $y \in (B \cap C)$. Omdat $x \in A$ en $y \in (B \cap C)$ is $z \in A \times (B \cap C)$.
Nu mogen we zeggen dat $A \times (B \cap C) \supseteq (A \times B) \cap (A \times C)$.

Omdat we hebben bewezen dat $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$ èn $A \times (B \cap C) \supseteq (A \times B) \cap (A \times C)$, kunnen we concluderen dat $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

In dit bewijs zijn we er van uit gegaan dat de verzamelingen B en C elkaar overlappen. In het geval dat dit niet gebeurt krijgen we $B \cap C = \varnothing$. Hierdoor zou je kunnen zeggen dat het bewijs niet compleet is, en daarom staat hieronder het bewijs voor het geval dat $B \cap C = \varnothing$:
Het cartesisch product van een willekeurige verzameling met de lege verzameling is altijd de lege verzameling. Dus als we zeggen dat $B \cap C = \varnothing$, dan betekent het dat $A \times (B \cap C) = \varnothing$. Hetzelfde kun je zeggen voor $(A \times B) \cap (A \times C)$, omdat hier ook B en C moeten overlappen, omdat anders $(A \times B) \cap (A \times C) = \varnothing$. Dus als B en C niet overlappen dan: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) = \varnothing$.

Hiermee hebben we bewezen dat als B en C wel overlappen èn als B en C niet overlappen er ten alle tijden geldt: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$. $\blacksquare$

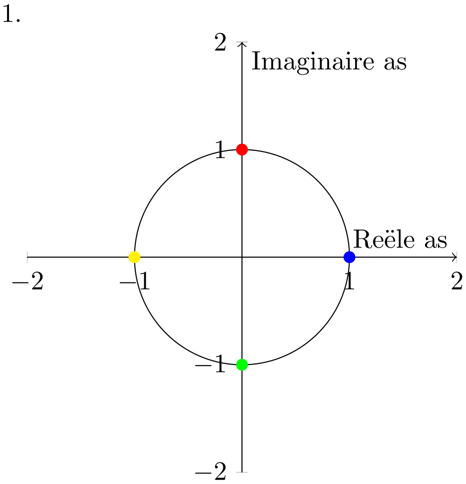
Opgave 6, serie 4

Opdracht: Zij $n \in \mathbb{N}$. Bepaal alle oplossingen van $z^n = 1$. Waar liggen deze oplossingen in het vlak? Teken ze voor een aantal waarden van n.
Uitwerking:
Zij $k \in \mathbb{Z}$. We kunnen zeggen dat het getal $1 = 1 * e^{k*2\pi i}$ in het complexe vlak. **De modulus** van 1 is namelijk gewoon 1 en **het argument** van 1 is $k * 2\pi$, omdat dit altijd resulteert in een argument met de waarde 0 voor de sinus functie, waardoor het getal altijd op de horizontale as van het complexe vlak beland[1]. Dat komt doordat $1 * e^{k*2\pi i} = 1 * (\cos(k * 2\pi) + i \sin(k * 2\pi)$.
Hiernaast geldt: $\forall k$ krijg je dat $\cos(k * 2\pi) = 1$ en $\sin(k * 2\pi) = 0$. Dus klopt de bewering dat: $1 = 1 * e^{k*2\pi i}$.

We kunnen nu zeggen dat $z^n = e^{k*2\pi i}$. Dit gaan we algebraïsch verder uitwerken:

$$z^n = e^{k*2\pi i}$$
$$z = \sqrt[n]{e^{k*2\pi i}} = (e^{k*2\pi i})^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}k*2\pi i}$$
$$z = e^{\frac{k*2\pi}{n}i}.$$

We zien nu duidelijk dat het argument(ϕ) van z gelijk is aan $\frac{k*2\pi}{n}$. Omdat we weten dat $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ en we nu het geval hebben dat $\phi = \frac{k*2\pi}{n}$ met $k \in \mathbb{Z}$ en $n \in \mathbb{N}$, kunnen we aannemen dat de dichtheid van $\mathbb{Q}$ overslaat in ϕ. Vanwege deze dichtheid kan ϕ (bijna) alle 'hoeken' aannemen, waardoor z oneindig veel oplossingen heeft. Deze oplossingen vormen samen een cirkel om de oorsprong van het complexe vlak met een modulus (straal) van 1.



Voor $n = 1$ met $k = 1$ krijg je het blauwe punt. Voor $n = 2$ met $k = 1$ krijg je het gele punt. Voor $n = 4$ met $k = 1$ krijg je het rode punt. Voor $n = 4$ met $k = -1$ krijg je het groene punt.

[1] De horizontale as van een complex vlak heeft altijd alle getallen in $\mathbb{R}$. De verticale as bevat het imaginaire deel van het complexe vlak. Voor een voorbeeld van een complex vlak bekijk de bladzijde.