1 1^a avaliação 21/02/2005

1. Determine as assíntotas verticais e horizontais, caso existam, ao gráfico da função
$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{5x^3 - 20x^2 + 15x}.$$

Resposta:
i) Raízes de $5x^3 - 20x^2 + 15$

$$\begin{aligned} 5x^3 - 20x^2 + 15 &= 0 \\ 5x(x^2 - 4x + 3) &= 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ ou $x^2 - 4x + 3 = 0$ donde $x' = 1, x'' = 3$

ii) raízes de $x^3 - 1$

$$x^3 - 1 = 0 \text{ donde } x = 1$$

logo,
$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Que tem como raízes apenas $x = 1$.

Analisar:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 + x + 1)(x - 1)}{5x(x - 3)(x - 1)} \tag{1}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2 + x + 1)}{5x(x - 3)} = +\infty \tag{2}$$

$x = 0$ é assíntota vertical.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 + x + 1)}{5x(x - 3)} = -\frac{3}{10} \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2 + x + 1)}{5x(x - 3)} = +\infty \tag{4}$$

$x = 3$ assíntota vertical.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+x+1)}{5x(x-3)} && (5)\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+x+1)}{5x^2-15x} && (6)\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{5-\frac{15}{x}} = \frac{1}{5} && (7)
\end{aligned}
$$

Note que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ logo $y = \frac{1}{5}$ é assíntota vertical.

2. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8}$;

   Resolução:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} && (8)\\
&= bla && (9)\\
& && (10)
\end{aligned}
$$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$;

   (c) Use o Teorema do confronto para mostrar que

$$\lim_{x\to 0} x^{10}\text{sen}\left(\frac{50\pi}{\sqrt[3]{x}}\right) = 0.$$